وحدة : النهايات والاتصال

متعة الرياضيات

مع : أحمد هجرس

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

نهاية دالة عند نقطة

الكتابة	$\lim\limits_{س \to أ} د(س)$
القراءة	نهاية الدالة د (س) عندما س تؤول إلي أ
المعني	أوجد قيمة الدالة عندما س تقترب جداً من أ

نقول أن : (س – أ) عامل صفري ، أي أن : د (أ) = ٠

خطوات إيجاد نهاية دالة نسبية (لها قاعدة واحدة) :

بالتعويض المباشر عن قيمة س = أ في الدالة .

	إذا كان الناتج		يكون الحل
١)	عدد حقيقي موجب ، سالب ، كسر ، جذر ، صفر		النهاية = العدد الحقيقي
٢)	$-\infty$ ، ∞		الدالة ليس لها نهاية عند هذه النقطة
٣)	$\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة	نستخدم إحدى الطرق الآتية	التحليل بأنواعه المختلفة
			القسمة المطولة
			الضرب في المرافق (إذا وجد جذر)
			النظرية : $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^{م} - أ^{م}}{س^{ن} - أ^{ن}} = \frac{م}{ن} \times (أ)^{م - ن}$
			قاعدة لوبيتال : نوجد مشتقة البسط والمقام ثم نعوض عن قيمة س (تستخدم هذه الطريقة في المسائل الاختيارية فقط)
			توحيد المقامات
			فصل البسط عن المقام
			الطرح والإضافة
			مسائل بها دالة المطلق
			مسائل بها دالة الصحيح

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

أولاً : بالتعويض المباشر :

نشاط صفي

١) $\lim_{\text{س} \to -5} \frac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} - 5}$

٢) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{3\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$

٣) $\lim_{\text{س} \to -5} \frac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} + 5}$

٤) $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^4 - 8\text{س}^2 + 16}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4}$

٥) $\lim_{\text{س} \to 2} \sqrt{\frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2}}$

٦) $\lim_{\text{س} \to 2} \left(\frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2 + 4} \right)^2$

٧) $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{5\text{س}^2 + 2\text{س} + 3}{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 1}$

٨) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 4}$

٩) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{4\text{س}^2 - 2\text{س} + \text{س}^3}{5\text{س}^2 + 3\text{س} + 1}$

١٠) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 2)^2 - 3}{5\text{س} + 2}$

متعة الرياضيات

مع : أحمد هجرس

ثانياً : مسائل بالتحليل : ويمكن استخدام لوبيتال

نشاط صفي

١) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س}^2 - 4}$

٢) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 10}{\text{س}^3 - 8}$

٣) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 - 6\text{س}}{4\text{س}}$

٤) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{5\text{س} - 10}{4\text{س} - 8}$

٥) $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{2\text{س}^2 - 32}{\text{س}^2 - \text{س} - 12}$

٦) $\lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 2}{2\text{س} - 1}$

٧) $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{3\text{س}^2 + \text{س} - 2}{\text{س}^2 - 1}$

٨) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{3\text{س}^2 - 2\text{س} - 21}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}$

٩) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + 2)^2 - 4}{3\text{س}^2 + 3\text{س}}$

١٠) $\lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س} + 2)^3 + 1}{2\text{س}^2 + 6\text{س}}$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

واجب منزل

١١) $\lim\limits_{2\text{س} \to 1} \dfrac{6 - 5\text{س}^{-1} + \text{س}^{-2}}{4 - \text{س}^{-2}}$

١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^{4} - 2\text{س}^{3} - 6\text{س} + 12}{\text{س}^{2} + \text{س} - 6}$

١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{3\text{س}^{2} + \text{س} - 2}{\text{س}^{2} - 1}$

١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{٣ + ٢\text{س} - \text{س}^{٢}}{٢٧ - \text{س}^{٣}}$

١٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٣}{٢}} \dfrac{٨\text{س}^{٣} - ٢٧}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$

١٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٢}}$

١٧) أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \text{س}}{\text{س} - ١}$

١٨) أوجد $\underset{س \to 1}{نهـا} \dfrac{س\sqrt{س} - س}{س - 1}$

١٩) $\underset{س \to 0}{نهـا} \dfrac{9-(3+س)^2}{س}$

٢٠) $\underset{س \to 2}{نهـا} \dfrac{(س-2)(س^3-8)}{(س^2-4)^2}$

٢١) $\underset{5^س \to 3}{نهـا} \dfrac{25^س-9}{25^س-5^س-6}$

٢٢) $\underset{س \to -2}{نهـا} \dfrac{2س^2-س-10}{7س^2+11س-6}$

٢٣) $\underset{س \to 4}{نهـا} \dfrac{(س-3)^2-1}{س^3-5س^2+4س}$

٢٤) $\underset{س \to 1}{نهـا} \dfrac{(\sqrt{س}-1)(\sqrt[3]{س}-1)}{(س-1)^2}$

مع : أحمد هجرس

ثالثاً : مسائل بالقسمة المطولة : ويمكن استخدام لوبيتال

نشاط صفي

١) $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{\text{س}^3 - 15\text{س} - 4}{\text{س}^2 - 16}$

معاملات المقسوم	١	——	- ١٥	- ٤	
الناتج × المقسوم علية		٤	١٦	٤	٤
معاملات الناتج	١	٤	١	صفر	

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{(\text{س} - ٤)(\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١)}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٤)}$$

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١}{\text{س} + ٤}$$

$$= \frac{١٦ - ١٦ - ١}{٤ + ٤} = \frac{-١}{٨}$$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^3 - 2\text{س} + 1}{\text{س}^3 - 1}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{\text{س}^4 - 21\text{س}^2 + 20\text{س}}{\text{س}^2 - 6\text{س} + 8}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \dfrac{2\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 4}{\text{س}^3 + 8}$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

واجب منزلي

٥) نهـا $\text{س} \leftarrow -1$ $\dfrac{\text{س}^5 - 3\text{س}^3 - 2}{\text{س}^4 - 5\text{س}^2 + 4}$

٦) نهـا $\text{س} \leftarrow 1$ $\dfrac{\text{س}^3 - 5\text{س}^2 + 7\text{س} - 3}{\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + \text{س}}$

٧) نهـا $\text{س} \leftarrow 1$ $\dfrac{\text{س}^4 + \text{س}^2 - 5\text{س} + 3}{\text{س}^3 - 3\text{س} + 2}$

٨) نهـا $\text{س} \leftarrow 1$ $\dfrac{5\text{س}^{-3} + 2\text{س}^{-1} - 7}{-4 + 3\text{س}^{-1} + \text{س}^{-3}}$

ملحوظة : نضرب البسط والمقام × س^{٣} أولاً

٩) نهـا $\text{س} \leftarrow ٣$ $\dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٣} - ٧\text{س} - ٦}$

١٠) نهـا $\text{س} \leftarrow -١$ $\dfrac{٨\text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ٦}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢}$

رابعاً : **مسائل بالضرب في المرافق :**

المقدار	المرافق	حاصل الضرب	ملاحظات :
$\sqrt{س - ٤} + ٣$	$\sqrt{س - ٤} - ٣$	$(س - ٤) - ٩$	# الجذر × نفسه = ما تحت الجذر
$\sqrt{س + ١} - \sqrt{٣}$	$\sqrt{س + ١} + \sqrt{٣}$	$(س + ١) - ٣$	# الفرق بين مربعين = المقدار × مرافقة التربيعي

المقدار	المرافق التكعيبي	حاصل الضرب
$\sqrt[٣]{س - ٤} + ٣$	$(\sqrt[٣]{س - ٤})^{٢} - ٣(\sqrt[٣]{س - ٤}) + (٣)^{٢}$	$(س - ٤) + ٢٧$
$\sqrt[٣]{س + ١} - ٢$	$(\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + ٢(\sqrt[٣]{س + ١}) + (٢)^{٢}$	$(س + ١) - ٨$

الفرق بين (مجموع) مكعبين = المقدار × مرافقة التكعيبي

نشاط صفي

١) $\lim_{س \to 1} \frac{س\sqrt{س} - س}{س - 1}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س + 4} - 2}{س}$

٣) $\displaystyle \lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س - 1} - \sqrt{3}}{س - 4}$

٤) $\displaystyle \lim_{س \to 5} \frac{س - 5}{\sqrt{س - 4} - \sqrt{6 - س}}$

واجب منزلى

٥) $\displaystyle \lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س + 1} - 2}{\sqrt{س - 2} - 1}$

٦) $\displaystyle \lim_{س \to 3} \frac{س - 3}{\sqrt{5س + 1} - \sqrt{7س - 5}}$

: أحمد هجرس

٧) $\lim\limits_{س \to ٧} \dfrac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{س-٧}$

٨) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س-\sqrt{س+٣}+١}{س^{٢}-س}$

٩) $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\sqrt{س^{٢}-س-٢}-٢}{س^{٣}-٢٧}$

١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س}{-س+\sqrt[٤]{س+١}-١}$

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

خامساً : **مسائل بالنظرية :**

١) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^5 - 32}{\text{س}^3 - 8}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 + 32}{\text{س}^3 + 8}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{2\text{س}^5 - 64}{\text{س}^3 - 8}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س}^3 + 8}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^6 - 64}{3\text{س} + 6}$

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^{11} + \text{س}^2}{\text{س}^7 - \text{س}}$

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{32 - \text{س}^5}{\text{س}^3 - 8}$

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{32 - \text{س}^5}{8 - \text{س}^3}$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

٩) $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \dfrac{32 س^5 - 1}{8 س^3 - 1}$

١٠) $\lim\limits_{س \to \sqrt{2}} \dfrac{س^6 - 8}{س^4 - 4}$

١١) $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{(س + 3 هـ)^7 - س^7}{5 هـ}$

١٢) $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{(س + 3 هـ)^5 - س^5}{هـ}$

١٣) $\lim\limits_{س \to ١٦} \dfrac{\sqrt[٤]{س^٣} - ٨}{\sqrt{س} - ٤}$

١٤) $\lim\limits_{س \to \frac{3}{2}} \dfrac{16 س^5 - 81 س}{2 س^3 - 3 س^2}$

١٥) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ك} \dfrac{س^{12} - ك^{12}}{س^{10} - ك^{10}} = ٣٠$ فأوجد قيمة ك

متعة الرياضيات

مع : أحمد هجرس

سادساً : **مسائل بها مجهول**

١) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} - س + ل}{٢\,س - ٦}$ موجودة ،
فأوجد قيمة ل

٢) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} + أ\,س + ب}{س^{٢} - ٩} = ٢$
فأوجد قيمة : أ ، ب

٣) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{م\,س - \sqrt{س + ٣}}{س^{٢} - س} = ب$
فأوجد قيمة ب

٤) أوجد قيمة ل التي تجعل :
$\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س - ٢}{٥\,س^{٢} - ١٠\,س + ٢\,ل\,س - ٤\,ل} = ٠٫٢٥$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

٥) إذا كان : $\underset{\text{١ – ٢ س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + (\text{م} + \text{١})\,\text{س} + \text{م}}{-\ \text{٢ س - ٢}} = \text{٢}$

فأوجد قيمة م .

٦) إذا كان : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق (س) – ٢٥}}{\text{س – ٥}} = \text{٤}$

فأوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق (س) – س}^{\text{٢}}}{\text{س – ٥}}$

٧) إذا كان : $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 + \text{أ س} + \text{ب}}{\text{س} - 1} = \text{٥}$

فأوجد قيمة أ ، ب

٨) إذا كان : $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 + \text{ك س} + 6}{\text{س}^2 - 9}$ موجوده ،

فأوجد قيمة ك

سابعاً : **توحيد المقامات** :

١) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \left(\dfrac{1}{\text{س} - 2} - \dfrac{12}{\text{س}^3 - 8} \right)$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \left(\dfrac{2}{\text{س}^2 - 4} - \dfrac{1}{2\text{س} - 4} \right)$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \left(\dfrac{1}{\text{س}} - \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}} \right) \left(\dfrac{1}{\text{س} - \sqrt{\text{س}}} \right)$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \left(\dfrac{4}{\text{س}} - \dfrac{4}{5} \right) \left(\dfrac{1}{\text{س}^2 - 25} \right)$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 3} (\text{س} - 3)\left(4\text{س}^2 - \dfrac{6}{\text{س}^2 - 9} \right)$

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to -5} \left(\dfrac{25}{\text{س} + 5} - \dfrac{\text{س}^2}{\text{س} + 5} \right)$

متعة الرياضيات

أحمد هجرس

ثامناً : تجزئ الكسر :

١) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{19} + \text{س}^5 - 2}{\text{س} - 1}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^5 + \text{س}^2 - 36}{\text{س} - 2}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}} + \sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س} - 1}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{٢\text{س} - \sqrt{\text{س}} - ٦}{٢ - \sqrt{\text{س}}}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{س}^٢ - ١٦}$

٦)

تاسعاً : **فصل البسط عن المقام :**

١) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^{2} - \text{س} - 2}{\sqrt[3]{\text{س}} + 1}$

٢) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -8} \frac{\sqrt{1 - \text{س}} - 3}{2 + \sqrt[3]{\text{س}}}$

٣) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[5]{\text{س}^{2}} - 1}{\sqrt[5]{\text{س}^{3}} - 1}$

٤) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س}^{2} - 16}$

متعة الرياضيات

مع : أحمد هجرس

٥) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{س + 8} - 2}{(س + 3)^5 - 243}$

٦) $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{\dfrac{3}{س + هـ} - \dfrac{3}{س}}{هـ}$

٧) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(1 + 4س)^8 - 1}{9س}$

٨) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(1 + 5س)^{10} - 1}{(1 + 7س)^8 - 1}$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعده

أولاً : لبحث النهاية عندما تتغير قاعدة تعريف الدالة على يمين ويسار أ :

@ نوجد النهاية من اليمين : د (أ⁺) = نهــا (س ← أ⁺) ٠٠٠٠ عند س > أ

@ نوجد النهاية من اليسار : د (أ⁻) = نهــا (س ← أ) ٠٠٠٠ عند س < أ

∵ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار ∴ الدالة لها نهاية .

∵ النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار ∴ الدالة ليس لها نهاية .

ثانياً : لبحث النهاية على فترة (مفتوحة أو مغلقة)

أ   حـ   ب

∵ الدالة معرفة على يمين أ فقط . ∴ نوجد النهاية اليمنى فقط .

∵ الدالة معرفة على يسار ب فقط . ∴ نوجد النهاية اليسرى فقط .

∵ الدالة معرفة على يمين ويسار حـ . ∴ نوجد النهاية اليمنى واليسرى .

وجود نهاية للدالة عند س ⟵ أ ، لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ والعكس

إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ ، فهذا لا يعني وجود نهاية للدالة عند س ⟵ أ

١) إذا كان : د (س) = { ٢ س + ١   س ≤ ١
                    ٥ س – ٢   س > ١

أوجد كلاً من : نهــا (س ← 1) د (س)

نهــا (س ← 2) د (س)

نهــا (س ← 0) د (س)

٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{٢ س + ٤} & \text{س < - ٣} \\ \text{٣ س + ٧} & \text{- ٣ < س < ٥} \\ \text{٥ – س} & \text{س} \geq \text{٥} \end{cases}$

فأوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to -3}$ د (س)

$\lim\limits_{\text{س} \to 5}$ د (س)

---

٣) أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to 0}$ د (س) = $\begin{cases} \dfrac{5\text{س}^2 - 5\text{س}}{30\text{س}^2 - 30\text{س}} & \text{س > ٠} \\ \dfrac{\sqrt{\text{س} + 9} - 3}{\text{س}} & \text{س < ٠} \end{cases}$

---

٤) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2} & \text{٢ < س < ٤} \\ \dfrac{1}{\text{س} - 5} & \text{٤} \leq \text{س} \leq \text{٦} \end{cases}$

فأوجد قيمة كل من : $\lim\limits_{\text{س} \to 2}$ د (س)

$\lim\limits_{\text{س} \to 4}$ د (س)

$\lim\limits_{\text{س} \to 6}$ د (س)

---

٥) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س + أ} & \text{س < أ} \\ \text{أ س}^{\text{٢}} \text{ + ب} & \text{س} \geq \text{أ} \end{cases}$ حيث $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) = ٤ فأوجد قيمة : أ ، ب

٦) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 - 9}{س + 3} & س \neq -٣ \\ ك & س = -٣ \end{cases}$

فأوجد قيمة ك حيث د (-٣) = $\lim\limits_{س \to -3}$ د (س)

---

٧) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ك\, س + ٣ & س < ١ \\ \dfrac{س^2 - 1}{س - 1} & س > ١ \end{cases}$

فأوجد قيمة ك لتكون $\lim\limits_{س \to 1}$ د (س) موجودة

---

٨) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} ٣\, س - ٢ & س < -١ \\ أ\, س + ب & -١ < س < ٣ \\ ٦ - س & س > ٣ \end{cases}$

فأوجد قيمة أ ، ب

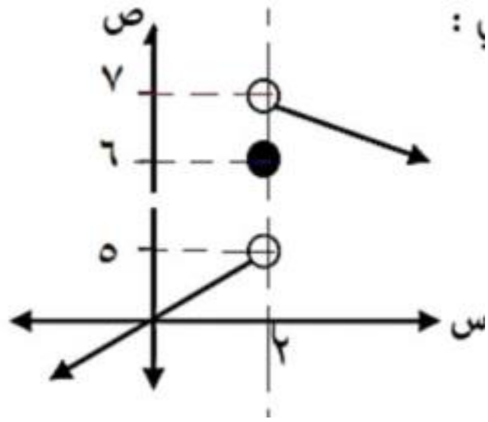
إذا كان د (س) لها نهاية عند س = -١ ، س = ٣

إيجاد النهاية من خلال الرسم

الدائرة المفتوحة لا تمنع وجود نهاية للدالة ،

النهاية تكون موجودة إذا كان : النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

١) باستخدام الشكل المقابل أوجد كلاً من :



ﺃ) د(٢) =

ب) نهـــا د(س) = ، س ← ٢^{+}

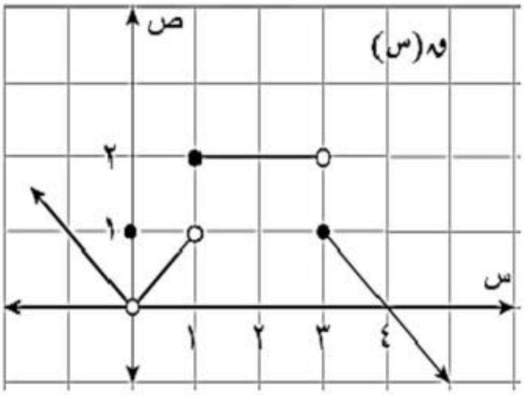
جـ) نهـــا د(س) = ، س ← ٢^{-}

ء) نهـــا د(س) ، س ← ٢

---

٢) إذا كان الشكل يمثل منحنى الدالة ق(س) المعرف على (ع)

فإن مجموعة قيم (أ) حيث نهـا ق(س) (س ← أ) غير موجودة هي :



أ) {١ ، ٣ ، ٠}

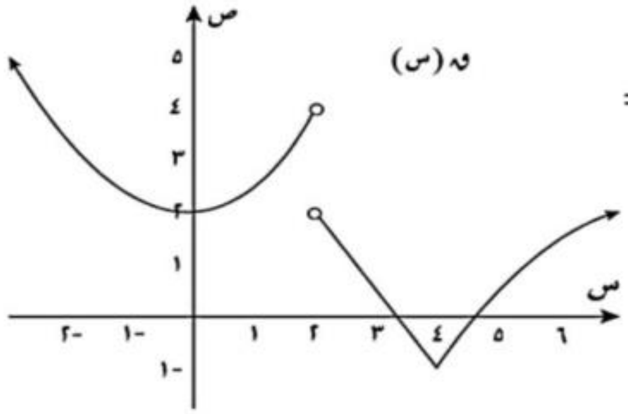
ب) {١ ، ٣ ، ٤}

ج) {١ ، ٣ ، ٤ ، ٠}

د) {١ ، ٣}

---

٣) معتمدا على الشكل ، اوجد ما يلي :



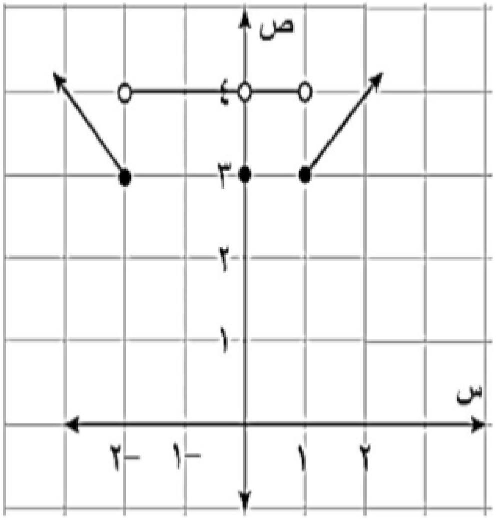
أ) نهـا ق(س) = ، س ← ٢^{+}

ب) نهـا ق(س) = ، س ← ٢^{-}

ج) نهـا ق(س) = ، س ← ٢

د) نهـا ق(س) = ، س ← ٣

هـ) نهـا ق(س) = ، س ← ٤



إذا كان الشكل يمثل منحنى الدالة ق(س) المعرف على (ع)

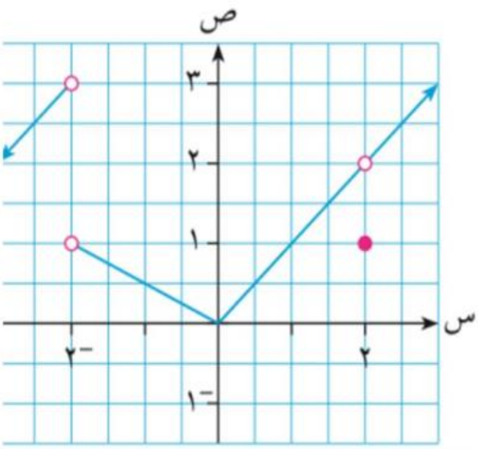
فـإن مجموعـة قـيم (أ) حيث

$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣ هي :

أ) {١}   ب) {١، -٢}

ج) {٠، ١}   د) {١، ٠، -٢}

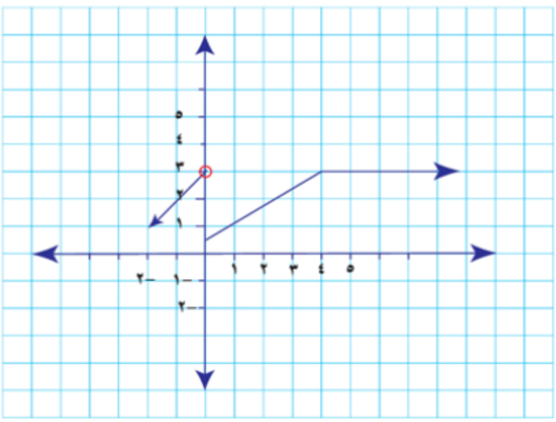
٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ق (س) ابحث النهايات الآتية :



أ $\underset{\text{س} \to -2^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)   ب $\underset{\text{س} \to -2^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)   ج $\underset{\text{س} \to -2}{\text{نهـا}}$ ق(س)

د $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}}$ ق(س)   هـ $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}}$ ق(س)

الرسم التالي يمثل بيان إحدى الدوال. من الرسم اوجد:



أ) $\underset{\text{س} \to 0^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{\text{س} \to 0^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}}$ د(س)

ب) $\underset{\text{س} \to 2^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{\text{س} \to 2^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}}$ د(س)

جـ) $\underset{\text{س} \to 4^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{\text{س} \to 4^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهـا}}$ د(س)

مسائل بها دالة المطلق

| س – ٣ | = | ٣ – س |

√(س – ٥)٢ = | س – ٥ | = | ٥ – س |

أولاً : **إعادة تعريف دالة المطلق** : إذا كان : د (س) = | س – ٢ |

١) نوجد أصفار ما بداخل المطلق . س = ٢

٢) نرسم خط الأعداد .

مثل إشارة س   عكس إشارة س

س – ٢   – س + ٢

أصفار المطلق
٢

نهـــا د (س) = نهـــا س – ٢ = ٤ – ٢ = ٢
س ← ٤   س ← ٤

نهـــا د (س) = نهـــا – س + ٢ = – ١ + ٢ = ١
س ← ١   س ← ١

لدراسة نهـــا د (س) ، لابد من إيجاد النهاية اليمنى والنهاية اليسرى
س ← ٢

نهـــا س – ٢ = ٢ – ٢ = صفر   ،   نهـــا – س + ٢ = – ٢ + ٢ = صفر
س ← ٢⁺   س ← ٢⁻

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = صفر

إذا كانت د(س) = $\frac{\text{س}^2 + ٥\text{س}}{|\text{س}+٥|}$ فأوجد كلاً من :

أ) نهـــا د(س)
س ← -٢

ب) نهـــا د(س)
س ← ٤

ج) نهـــا د(س)
س ← -٥

١) $\displaystyle \lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{|س - ١|}$

٢) $\displaystyle \lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{|س + ٣|}$

٣) $\displaystyle \lim_{س \to -٤} \frac{-٤ + |٢س + ٤|}{س + ٤}$

٤) إذا كان : $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + س \dfrac{|س - 3|}{3 - س} & س < ٣ \\ س + ٤ & س > ٣ \end{cases}$

فابحث نهاية الدالة عند س = ٣

٥) إذا كانت $د(س) = س|س - ٣| + ٢$ ، أوجد $\displaystyle \lim_{س \to ٣} د(س)$

متعة الرياضيا مع : أحمد هجرس

إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ١ + \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{|\text{س}+٢|} & ، \; -٣ < \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س}+١ & ، \; ٠ < \text{س} < ٣ \end{cases}$

أوجد: أ) $\lim\limits_{\text{س} \to -٣^{+}}$ د(س) ، ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ د(س) ، ج) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د(س) ، د) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}}$ د(س)

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣} |\text{س}^{٢} - ٩|$

مثل إشارة س٢ عكس مثل إشارة س٢

س٢ – ٩ | – س٢ + ٩ | س٢ – ٩

-٣ ٣

بنفس الطريقة في المثال السابق أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} | ٤ - \text{س}^{٢} |$

أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$

مسائل بها دالة الصحيح

$[س + ا] = [س] + ا$ ، حيث (ا) عدد صحيح

$[س] = ا \Leftarrow ا \le س < ا + ١$

إعادة تعريف دالة الصحيح : ١) نوجد طول الفترة = $\frac{1}{|معامل س|}$

٢) نرسم خط الأعداد ونوضح علية الفترات .

٣) نعوض في الدالة عن قيم س :

	س : موجبة	س : سالبة
نعوض بـ	بداية الفترة	نهاية الفترة

٤)

	نهاية الدالة	السبب
عند بداية الفترة ونهايتها	غير موجودة	النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى
داخل الفترة	موجودة = ناتج التعويض	

١) إذا كان : د (س) = [٣ - $\frac{1}{2}$ س] حيث س ∋ [- ٢ ، ٤]

فأوجد : $\underset{س \to 2}{نهـا}$ د(س)

$\underset{س \to 1}{نهـا}$ د(س)

---

٢) إذا كان : د (س) = [٢ س – ١] فأوجد نهاية الدالة عند كلاً من : س = ١ ، س = ٥و٠ ، س = ٢٥و٠

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

٣) إذا كان : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\left[\frac{\text{س}}{4} + 1\right]}{|\text{س} + 4|}$ فابحث نهاية الدالة عند س = - ٤

٤) إذا كان : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\left[\frac{\text{س}}{2} + 1\right]}{|\text{س} + 2|}$ فابحث نهاية الدالة عند س = - ٢

٥) إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \left[\frac{\text{س}}{٢} + ١\right] + \text{س} & ، \text{س} < ٣ \\ |\text{س} - ٤| + \text{ك} & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{د(س)}$ موجودة ، أوجد قيمة ك.

٦) إذا كـــان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} [٢\text{س} + ١] & ، \text{س} < ٣ \\ |١ - ٢\text{س}| & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-} \text{د}(\text{س})$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

٧) إذا كانت $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٢ + جـ \left[\frac{س}{٢}\right] - جـ}{س^٢ - ٢س - ١٥}$ موجودة فأوجد قيمة جـ

---

٨) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \left[\frac{س}{٢} + ١\right] + س &، \quad س < ٣ \\ |س - ٤| + ك &، \quad س \geq ٣ \end{cases}$ وكانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) موجودة ، أوجد قيمة ك

---

٩) ابحث نهاية الدالة هـ (س) = $\dfrac{\left[\frac{١}{٢}س + ١\right]}{|س + ٢|}$ ، عند النقطة س = -٢

نظريات النهايات

١) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{جـ} = \text{جـ}$ حيث جـ عدد حقيقي

٢) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ك} \cdot \text{د(س)} = \text{ك}\ \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

٣) إذا كانت : د (س) دالة كثيرة حدود ، فإن : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د (س)} = \text{د (أ)}$

٤)

	إذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \text{م}$ ، $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = \text{ن}$ فإن:
١	$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}(\text{د(س)} \pm \text{هـ(س)}) = \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} \pm \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = \text{م} \pm \text{ن}$
٢	$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}(\text{د(س)} \cdot \text{هـ(س)}) = \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} \cdot \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = \text{م} \cdot \text{ن}$
٣	$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}}{\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \neq ٠$
٤	$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{د(س)}} = \sqrt{\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}} = \sqrt{\text{م}}$ ، $\text{م} \geq ٠$ ، $\text{د(س)} \geq ٠$
٥	$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ (\text{د (س)})^{\text{ل}} = \text{م}^{\text{ل}}$

$\underset{\text{س} \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}}\ ٧ = ٧$ ، $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}}\ ٧ = ٧$

٢) إذا كان : د (س) = ٢ س^{٣} – ٣ س + ٢ فأوجد : نهـا د (س) عندما س ← ٣

٣) إذا كان : $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}\ \text{هـ (س)} = ٨$ ، $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}\ \text{ق (س)} = -٦$ فأوجد قيمة كل من :

$\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}\ (\text{د (س)} \times \text{ق (س)})$

$\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}\ (٣\ \text{هـ (س)} - ٢\ \text{ق (س)})$

$\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}\ (\text{س هـ (س)} + \text{ق}^{٢}\text{(س)})$

إذا كانت $\lim_{\text{س}\to ٣} \text{هـ(س)} = ٢$ ، فإن $\lim_{\text{س}\to ٣} (\text{٤هـ(س)} + ١)$ تساوي :

- ٥
- ٧
- ٩
- ١٣

إذا كانت $\lim_{\text{س}\to} \frac{\text{ل(س)} - ٤}{\text{س}} = ٨$ وكان ل(س) دالة كثيرة حدود فإن $\lim_{\text{س}\to} (\text{ل(س)} + ١٠) =$

- ٤
- ١٤
- ١٨
- ٦

إذا كانت ق(س) كثيرة حدود وكانت $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق(س)}}{\text{س}} = ٣$ فإن $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}^٢\text{(س)}}{\text{س}} =$

- ٩
-
- ٦
- ٣٦

إذا كانت ق(س) كثيرة حدود وكانت $\lim_{\text{س}\to} (\text{ق(س)} - ٥) = ٣$ فإن $\sqrt{\text{٢ق(س)}} =$

- ١٦
- -٤
- ٤
- غير موجودة

إذا كانت ق(س) دالة كثيرة حدود وكانت $\lim_{\text{س}\to} \frac{\text{٢ق(س)}}{\text{س}} = ٤$ فإن $\lim_{\text{س}\to} \frac{(\text{س} + ١)^٢ - ١}{\text{ق(س)}}$

- ٤
- ١
- $\frac{١}{٤}$
- ٢

إذا كانت $\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\text{٤س ق(س)} + \frac{١٢}{\text{س}}\right) = ٥٢$ فجد: $\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\text{ق}^٣\text{(س)} + \frac{٢٤}{\sqrt{\text{ق(س)}}}\right)$

إذا كانت $\lim_{\text{س}\to ١} \left(\text{٣س}^٢ - \frac{٥}{\text{هـ(س)}} + ٢\right) = ٠$ فأوجد $\lim_{\text{س}\to ١} \text{هـ(س)}$.

منعة الرياضيا
مع : أحمد هجرس

نهاية دوال بها جذور

مجال الجذر التكعيبي = ح

مجال الجذر التربيعي : ما تحت الجذر ≥ صفر

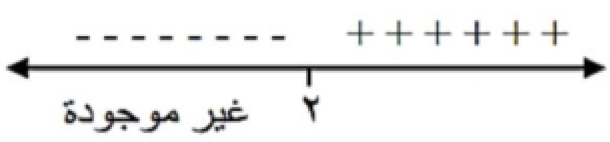
نهاية الجذر التكعيبي دائماً موجودة (بالتعويض المباشر)

	ناتج ما تحت الجذر	النهاية
الجذر التربيعي بالتعويض المباشر	موجب	= الناتج
	صفر	غير موجودة (اليمين له قيمة واليسار غير مُعرف)
	سالب	غير موجودة (خارج مجال التعريف)

١) إذا كان : د (س) = $\sqrt[3]{س+٢}$ فأوجد مجال د (س) ، نهـــا (س ← ٥) ، نهـــا (س ← -٢) ، نهـــا (س ← -٤)

٢) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$

فأوجد مجال د (س)



نهـــا (س ← ٣) د (س)

نهـــا (س ← ٢⁺) د (س)

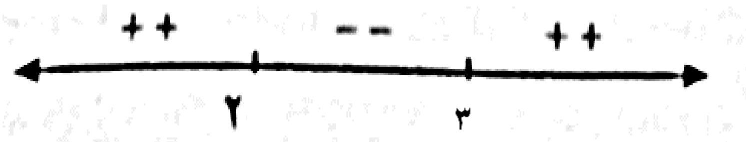
نهـــا (س ← ٢) د (س)

نهـــا (س ← ١) د (س)

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

٢) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٥ س + ٦}$

فأوجد مجال د (س)



نهــا$_{س \to ٣}$ د (س)

نهــا$_{س \to ٥و٢}$ د (س)

نهــا$_{س \to ٢}$ د (س)

نهــا$_{س \to ١}$ د (س)

نهــا$_{س \to ٤}$ د (س)

اذا كانت نهـــا$_{س \to ب}$ $\sqrt{س - ب}$ موجودة فإن قيمة ب تكون أ) ٢ ب) ١ جـ) صفر د) -١

إذا كانت نهــــا$_{س \to -١}$ $\sqrt{ل - س^{٢}}$ موجودة فإن قيمة ل هي : أ) ٢ ب) صفر جـ) -١ د) -٢

اذا كانت د(س)= $\sqrt{س - ب}$ ، ب>٠ فإن نهـــا$_{س \to جـ}$ د(س) تكون موجودة عندما جـ

أ) جـ < ب ب) جـ > ب ج) جـ ≤ ب د) جـ ≥ ب

حدد مجال كل من الجذور الآتية :

$\sqrt{١٦ - س^{٢}}$

$\sqrt{س^{٢} + ٩}$

نهاية الدالة عندما س تؤول إلي ∞

الاستراتيجية :

مع : أحمد هجرس

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = $ صفر ، $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{أ}{س} = $ صفر ، $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{أ}{س^{ن}} = $ صفر

كسر أصغر من (١) أس ∞ = صفر

كسر أكبر من (١) أس ∞ = ∞

خطوات الحل : ١) التعويض المباشر يعطي $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$ أو صفر × ∞ كمية غير معينة

٢) لابد من قسمة البسط والمقام علي أعلي أس في الدالة .

ويمكن استخدام الجدول الآتي مباشرة في بعض المسائل .

	الناتج	الحل
١)	أس البسط = أس المقام	$\frac{\text{معامل أعلي أس}}{\text{معامل أعلي أس}}$
٢)	أس البسط < أس المقام	صفر
٣)	أس البسط > أس المقام	∞

@ إذا كانت س تؤول إلي – ∞ نحول كل س إلي – س ونكمل الحل .

@ س = $\sqrt{س^{٢}}$ = $\sqrt[٣]{س^{٣}}$ = ...

@ إذا كانت الدالة بها جذر تربيعي فقط ، نضرب في المرافق أولاً ليصبح دالة كسرية ونكمل الحل كما سبق .

أوجد قيمة النهايات الآتية :

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{2س^{5} + س^{2} - 36}{س^{2} - 3س^{5} - 2}$

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{3} + س^{4} - 6س}{4س^{2} + 7س^{5} - 2}$

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^3 + \text{س}^4 - 6\text{س}^7}{4\text{س}^2 + 7\text{س}^3 - 2}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \sqrt[3]{\dfrac{16\text{س}^7 - 27\text{س}^5}{1 - 2\text{س}^7}}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{2\text{س}^{-5} + \text{س}^{-2} - 36}{\text{س}^{-2} - 3\text{س}^{-5} - 2}$

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{-4} - \text{س}^{-3}}{3\text{س}^{-4} + 2\text{س}^{-1}}$

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{5\text{س}(3\text{س} - 1)(\text{س} + 2)}{3\text{س}^2(\text{س} - 1)}$

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(3\text{س}^2 - 1)^3(\text{س} + 2)^5}{(3\text{س}^4 + 1)^2(\text{س} - 1)^3}$

٩) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{9\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 3}}{\sqrt[4]{8\text{س}^6 - 3\text{س}^4}}$

١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{9\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}}{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 3\text{س}^2}}$

متعة رياضيا
مع : أحمد هجرس

(١١) $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} - ٢س + ٢} - س\right)$

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} + س} - س\right)$

(١٣) $\lim_{س \to -\infty} \frac{٤س^{٣} - ٢س^{٢}}{س^{٦} + س^{٤}}$

(١٤) $\lim_{س \to -\infty} \frac{٢س - \sqrt{س^{٢} - ٤}}{س + ٧}$

(١٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} - ٥س + ١}}{|٣س - ٢|}$

(١٦) $\lim_{س \to -\infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} - ٥س + ١}}{|٣س - ٢|}$

(١٧ $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \dfrac{٥ \times ٩^{\text{ن}}}{٧ \times ٩^{\text{ن}} - ١١ \times ٥^{\text{ن}}}$

(١٨ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٣^{(\text{س}+١)} - ٢ \times ٤^{\text{س}}}{٣^{(\text{س}-١)} + ٢^{٢\text{س}}}$

(١٩ إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}} + ١١}{١٥ - ٣\text{س} - ٢\text{س}^{٦}} = ٢$. أوجد قيمة أ ، ن

(٢٠ إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(\text{أ}+٤)\text{س} - (\text{أ}+٢)\text{س}^{٣}}{(\text{أ}-٢)\text{س} + ٥} =$ ب حيث أ ، ب ∈ ح . أوجد قيمة أ ، ب

أوجد قيمة ن في كل من الحالات الآتية :

(٢١ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{١}{٣}$

(٢٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ١}$ موجودة

(٢٣ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ١}$ غير موجودة

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

اتصال الدالة عند نقطة ∋ لمجالها

@ معنى اتصال الدالة : أى عند رسمها لا نجد بها ثقب أو قفزة عند هذه النقطة .

@ خطوات بحث اتصال د (س) عند س = أ

#١ نوجد : د (أ) الدالة معرفة عند س = أ

#٢ نوجد : $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ د (س) النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

#٣ $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ د (س) = د (أ) التعريف = النهاية

فتكون الدالة متصلة عند النقطة المحددة .

تمارين

	الدالة	المجال	الاتصال
١)	الحدودية ثابتة ، خطية ، تربيعية ، تكعيبية ، ...	ح	متصلة على مجالها
٢)	الكسرية	ح – { أصفار المقام }	متصلة ما عدا عند أصفار المقام
٣)	الجذر التربيعي	ما تحت الجذر ≤ صفر	# ما تحت الجذر > صفر (متصلة) # ما تحت الجذر = صفر (غير متصلة) # ما تحت الجذر > صفر (غير متصلة)
	الجذر التربيعي في المقام	ما تحت الجذر > صفر	
٤)	الجذر التكعيبي	ح	متصلة
	دالة المطلق	ح	متصلة على مجالها
	دالة الصحيح	ح	# عند بداية ونهاية الفترة (غير متصلة) # داخل الفترة (متصلة)

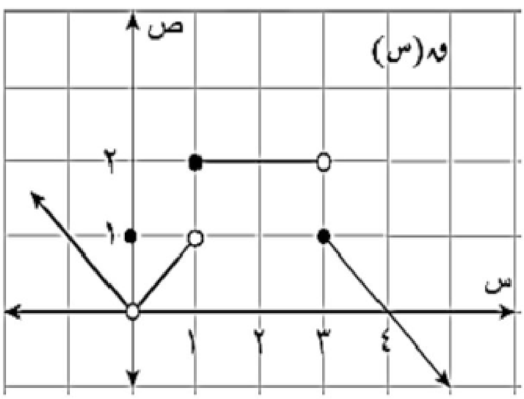
الشكل المقابل يوضح أن :

الدالة معرفة بأكثر من قاعدة (اكتب الدالة)

الدالة متصلة عند كل من : س = - ١ ، س = ٢ ، س = ٤

الدالة غير متصلة عند كل من : س = ٠ ، س = ١ ، س = ٣

اذكر السبب في كل حالة



متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

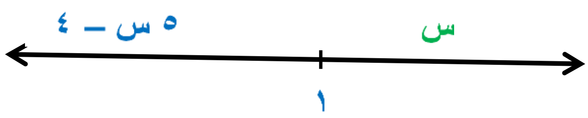
١) إذا كان : د (س) = { ٥ س – ٤ ، س ≤ ١ ؛ س ، س > ١ }

فابحث اتصال الدالة عند س = ١

@ التعريف : د (١) = ٥ × ١ – ٤ = ١

@ النهاية اليمنى : نهـــا س ← ١⁺ س = ١

@ النهاية اليسرى : نهـــا س ← ١⁻ ٥ س – ٤ = ١



التعريف = النهاية اليمنى = النهاية اليسرى   تكون الدالة متصلة عند س = ١

لبحث اتصال الدالة عند س = ٣   نوجد التعريف والنهاية اليمنى فقط

لبحث اتصال الدالة عند س = ٠   نوجد التعريف والنهاية اليسرى فقط

---

٢) إذا كان : د (س) = { ٥ س – ٤ ، س < ١ ؛ س ، س > ١ }

فابحث اتصال الدالة عند س = ١

التعريف : د (١) غير موجودة   الدالة غير متصلة عند س = ١

---

٣) إذا كان : د (س) = { ٥ س – ٤ ، س ≤ ١ ؛ ٢ س ، س > ١ }

فابحث اتصال الدالة عند س = ١

@ التعريف : د (١) = ٥ × ١ – ٤ = ١

@ النهاية اليمنى : نهـــا س ← ١⁺ ٢ س = ٢

@ النهاية اليسرى : نهـــا س ← ١⁻ ٥ س – ٤ = ١   النهاية غير موجودة عند س = ١

التعريف = النهاية اليسرى ≠ النهاية اليمنى   تكون الدالة غير متصلة عند س = ١

---

٤) ابحث اتصال : د (س) = $\frac{\text{س - 1}}{\text{س + 1}}$ عند س = ٢

٥) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} ٢\text{س} - ٣ & \text{س} \geq ٢ \\ \text{س} + ١ & \text{س} < ٢ \end{cases}$ فابحث اتصال الدالة عند س = ٢

---

٦) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3} & \text{س} \neq ٣ \\ ٥ & \text{س} = ٣ \end{cases}$ فابحث اتصالها عند س = ٣

@ وإذا كانت غير متصلة ، فأعد تعريف الدالة لتكون متصلة عند س = ٣

---

٧) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ & \text{س} > \text{ك} \\ ٤\text{س} - \text{ك} & \text{س} \leq \text{ك} \end{cases}$ فأوجد قيمة ك لتكون الدالة متصلة عند س = ك

---

٨) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ٣ & \text{س} > ٢ \\ \text{س}^٢ + ١ & \text{س} < ٢ \end{cases}$ أعد تعريف الدالة لتكون متصلة عند س = ٢

٩) ابحث اتصال د (س) = | س -1| + ٢ عند س = ١

---

١٠) ابحث اتصال د (س) = س | س - 3| + ١ عند س = ٣

---

١١) ابحث اتصال الدالة : د (س) = [٢ س – ١] عند س = ١ ، س = ٣ ، س = ٢٥و٠

---

١٢) اثبت أن الدالة : $د(س) = \frac{س^{٣} - ٧٢٩}{\sqrt{س} - ٣}$ غير متصلة عند س = ٩ ثم أعد تعريف الدالة لتكون متصلة

---

١٣) أوجد قيمة ل التي تجعل الدالة $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{٤+س} - ٢}{س} & س \neq ٠ \\ ل & س = ٠ \end{cases}$ متصلة عند س= ٠

١٤) ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} س^{٢}-٢س+٢ & س \leqslant ٢ \\ |س-٣| & س > ٢ \end{cases}$ عند س= ٢ ، س=٣

---

١٥) إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} س+ﺃ & س \leqslant ٥ \\ ٣س+ب & س > ٥ \end{cases}$ متصلة عند س=٥ وكانت د(٥)=٨ . أوجد قيمة ﺃ ، ب

---

١٦) إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢}-١ & س \leqslant ٠ \\ ﺃس^{٢}+ب & ٠ < س < ١ \\ \sqrt{٤س+٥} & س \geqslant ١ \end{cases}$ متصلة عند س= ٠ و عند س=١ أوجد قيمة ﺃ ، ب

متعة الرياضيا مع : أحمد هجرس

اتصال دالة على فترة

١) نرسم خط أعداد ونوضح علية النقاط التي يتغير حولها تعريف الدالة .

الخطوة الأولي : نبحث اتصال الدالة : في كل فترة على حدة .

الخطوة الثانية : نبحث اتصال الدالة : # عند النقط التى يتغير عندها تعريف الدالة ،

وكذلك عند طرفي المجال (إن وجد) نبحث يمين البداية ، يسار النهاية

@ نذكر وصف إجمالي لاتصال الدالة

@ إذا كانت الدالتان : د (س) & ر (س) معرفتين ومتصلتين على الفترة [أ ، ب]

فإن كل من الدوال الآتية تكون متصلة أيضاً على نفس الفترة :

د (س) ± ر (س)

د (س) ٠ ر (س)

$\frac{د(س)}{ر(س)}$ ما عدا عند أصفار ر (س)

في كل من الدوال الآتية حدد مجال اتصالها :

١) د (س) = ٥	٢) د (س) = ٣ س + ٢
٢) د (س) = $س^٣$ + ٣ $س^٢$ – ٧	٣) د (س) = ٤ $س^٢$ + ٥ س - ١
٤) د (س) = $\frac{س^2 + 1}{س^2 - 5س + 6}$	٥) د (س) = $\frac{س + 7}{س^3 - 8}$
٦) د (س) = $\frac{2س}{س^2 + 16}$	٧) د (س) = $\frac{س^2 - 1}{5}$

٨) د (س) = | س – ٢ | + ٣

٩) د (س) = س | س – ١ |

١٠) د (س) = [٢ س – ١]

١١) د (س) = [٣ – ٥و٠ س]

١٢) د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$

١٣) د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$

١٤) ابحث اتصال د (س) = { س^{٢} + ٢ س + ٢ ، س < ٠
٣ – س ، س ≥ ٠
علي مجالها .

١٥) ابحث اتصال الدالة : د (س) = { ٣ س – ٥ ، -١ ≤ س < ٣
س^{٢} – ٥ ، ٣ ≤ س ≤ ٥
علي مجالها .

١٦) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٥ س} - \text{٢} & \text{-١} \le \text{س} \le \text{٣} \\ \text{س}^{\text{٢}} + \text{٤} & \text{٣} < \text{س} < \text{٥} \\ \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣} & \text{٥} \le \text{س} < \text{٧} \end{cases}$

ابحث اتصال د (س) علي مجالها

---

١٧) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{6} - 1}{\text{س}^{3} - 1} & \text{- ٤} < \text{س} < \text{١} \\ |\text{س} - \text{٢}| & \text{١} \le \text{س} < \text{٣} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{٣} \le \text{س} < \text{٦} \end{cases}$

ابحث اتصال د (س) علي مجالها

@ إذا كانت الدالة متصلة على ح فأوجد قيمة الثوابت فى كل مما يأتى :

١٨) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٣ س} + \text{٧} & \text{س} \le \text{٤} \\ \text{ك س} - \text{١} & \text{س} > \text{٤} \end{cases}$

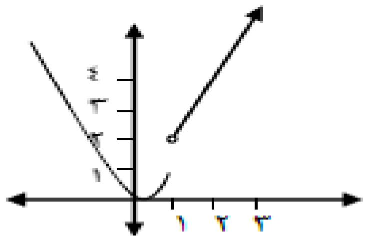
١٩) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٣ س} + \text{ك} & \text{س} < \text{٢} \\ \text{١} - \text{ك س}^{\text{٢}} & \text{س} \ge \text{٢} \end{cases}$

مراجعة الوحدة الأولى

أسئلة اختبارات الأعوام : ٢٠٠٩ – ٢٠١٩

اختبار ١٨-١٩ دور أول

١) إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س) فإن $\lim\limits_{س \to ٥}$ د(س) تساوي :



☐ ٥ ☐ ١٠

☐ ٢٥ ☐ ∞

---

٢) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٤}$ ق(س) = ١ وكانت ق(٤) = ٢ فإن

$\lim\limits_{س \to ١}$ (ق(٣س+١) + ق(٤س) + ٣س − ٤) تساوي :

☐ ١ ☐ ٢ ☐ ٣ ☐ ٤

---

٣) تكون الدالة د(س) = $\dfrac{\sqrt{س + ٤}}{٢ - \sqrt{١ - س}}$ متصلة على :

☐ [-٤ ، ١] ☐ [-٤ ، ١] - { -٣ }

☐] -٤ ، ١ [- { -٣ } ☐ ح

---

٤) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{س^٢ + (م+١)س + م}{-٢س - ٢}$ = ٢ تساوي :

☐ -٤ ☐ -٣ ☐ صفر ☐ ٣

---

١٥) أوجد $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٤س(٣ - س^٢)}{٢س^٣ - ٣س + ١}$

---

١٦) ابحث اتصال الدالة د(س) على مجالها حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤س + ٣}{س + ١} & ، س < ٠ \\ \left[\dfrac{س}{٢} + ٣ \right] & ، ٠ \le س < ٤ \end{cases}$

---

١٧) بدون استخدام الاشتقاق ، أوجد $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{٢\sqrt{س + ١} - ٣\sqrt[٣]{س + ٥} + ٢}{|٤ - ٣س| - ٥}$

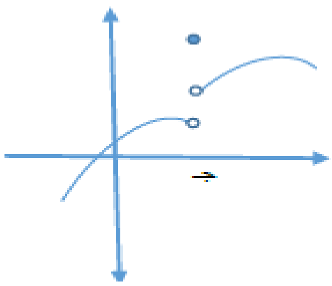
اختبار ١٧ – ١٨ تجريبي

١) إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(س^{٢ن} + ١)(س^{٢} - ٣س + ٤)}{س^{٨}} = ١$ فإن قيمة ن تساوي:

- ١
- ٢
- ٣
- ٤

- -

٢) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س) فإن سبب الانفصال عند النقطة جـ هو :



- $\lim\limits_{س \to جـ^{-}}$ د(س) غير موجودة
- $\lim\limits_{س \to جـ^{+}}$ د(س) غير موجودة
- $\lim\limits_{س \to جـ}$ د(س) غير موجودة
- د(جـ) غير معرفة

- -

٣) إذا كانت د(س) = م . هـ(س) ، حيث م عدد حقيقي ، م $\neq$ ٠ وكانت $\lim\limits_{س \to أ} \sqrt{د(س)}$ = صفر فإن قيمة $\lim\limits_{س \to أ}$ هـ(س) تساوي :

- صفر
- $\sqrt{م}$
- م
- غير موجودة

- -

٤) $\lim\limits_{٣^{س} \to ٢} \left[\frac{٢٧^{س} - ٨}{٩^{س} + ٣^{س} - ٦} \right]$ يساوي :

- صفر
- $\frac{١٢}{٥}$
- $\frac{٧٢١}{٨٤}$
- غير موجودة

- -

١) ابحث اتصال الدالة على مجالها :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س - ١} & ، \quad ٢ > س \geq ٠ \\ ٤س + ٣ & ، \quad ٤ > س \geq ٢ \end{cases}$$

١) إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} [س - ٤] & ، \quad أ > س \\ ٧ - [س] & ، \quad أ < س \end{cases}$$

أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = أ حيث أ $\in$ ص .

- -

٢) أوجد $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س + ٢}{س^{٣} + س + ١٠}$.

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

اختبار ١٦ - ١٧ تجريبي

١) إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س - م س^{٣}}{٢ س^{٣}} = -٨$ فإن قيمة الثابت م تساوي:

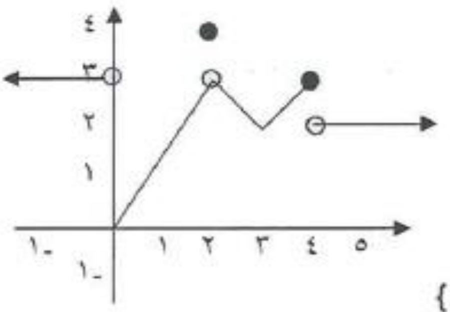
☐ -١٦ ☐ -٤

☐ ٤ ☐ ١٦

---

٢) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق المعرف على ح

فإن مجموعة قيم أ حيث $\lim\limits_{س \to أ}$ ق (س) = ٣ هي :



☐ $]-\infty ، ٠[\cup \{٢\}$ ☐ $]-\infty ، ٠] \cup \{٢\}$

☐ $]-\infty ، ٠[\cup \{٢ ، ٤\}$ ☐ $]-\infty ، ٠[\cup \{٢ ، ٤\}$

---

٣) اذا كان ى(س) = $\begin{cases} [س] + ب ، & ١ \le س < ٢ \\ \frac{١٠}{س} ، & ٢ \le س \le ٣ \end{cases}$ فإن قيمة ب التي تجعل ى(س) متصلا عند س=٢ هي

☐ -١ ☐ -٢

☐ ٣ ☐ ٤

---

١٥) أوجد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٢+س} - \frac{١}{٢}}{س}$

---

١٦) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{ب}{س} + س ، & ٠ < س \le ٢ \\ [س] + ٣ ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

وكانت د(س) متصلة عند س=٢ ، فأوجد قيمة ب

اختبار ١٥ - ١٦ تجريبي

١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢-١}{س+١} =$

أ) ∞ ب) -١ جـ) ١ د) $-\infty$

٢) إذا كان $\lim_{س \to ١} د(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ١} ه(س) = ٥$ فإن $\lim_{س \to ١} \frac{د(س)}{٢ه(س)} =$

أ) $\frac{٢}{٥}$ ب) $\frac{٨}{٥}$ جـ) $\frac{٤}{٥}$ د) $\frac{١٦}{٥}$

٣) اذا كانت $د(س) = \begin{cases} أس^٢ + ١ &، س \le ٥ \\ |س| + ١ &، س > ٥ \end{cases}$ فإن قيمة أ التي تجعل $\lim_{س \to ٥} د(س)$ موجودة هي:

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{6}{٢٥}$ جـ) $\frac{٧}{٢٥}$ د) $\frac{١}{٥}$

٤ اذا كانت $د(س) = \begin{cases} [س+ك] &، ١ \le س < ٢ \\ ٧ - ٢س &، س \ge ٢ \end{cases}$

فإن قيم ك التي تجعل د(س) متصلة عند س = ٢ تنتمي للفترة :

أ) [١، ٢] ب) [١، ٢[جـ)]١، ٢] د)]١، ٢[

---

١٥) ابحث نهاية الدالة $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - س}{س - ١} &، س \le -٢ \\ س + ٨ &، س > -٢ \end{cases}$ عند س = -٢

---

١٦) ابحث اتصال الدالة $ق(س) = \left[\frac{س}{٢}\right] + ٤$ ، $٠ \le س < ٣$ على مجالها

---

١٨) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $د(س) = \begin{cases} |١ - ٣س| &، س \ge ١ \\ ٢س^٢ + ٣س + ٢ &، س < ١ \end{cases}$

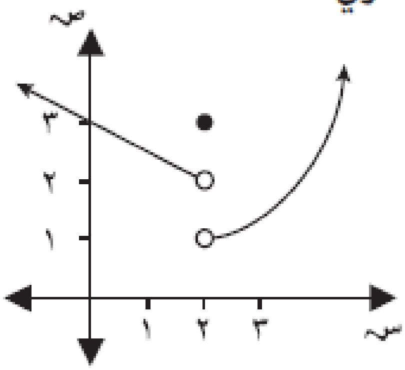
اذا علمت أن د(س) متصلة على مجالها.

---

١٩) أوجد $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س} + \sqrt{٥ - س} - ٣}$

اختبار ١٥ - ١٦ دور أول

١) إذا كان الشكل المجاور يمثّل بيان الدالة د(س)، فإن $\lim_{س \to ٢}$ د(س) تساوي:



- [ ] ١
- [ ] ٢
- [ ] ٣
- [ ] غير موجودة

٢) $\lim_{س \to \frac{٥}{٢}} \frac{[س]}{س} =$

- [ ] $\frac{٥}{٢}$
- [ ] ٢
- [ ] ١
- [ ] $\frac{٤}{٥}$

٣) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} |س| + ب &، س \geq ٣ \\ ٢س - ١ &، س < ٣ \end{cases}$ متصلة على ح ، فإن قيمة ب تساوي:

- [ ] ٢
- [ ] ٤
- [ ] ٨
- [ ] ١٠

---

١٥) أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٥} + ٣س + ١}{٢س^{٥} + ٩}$

---

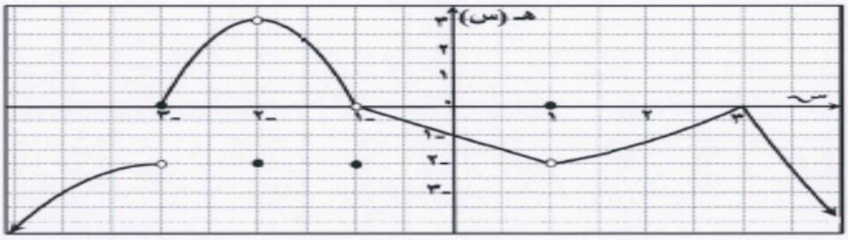
١٦) ابحث اتصال الدالة د (س) على مجالها حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{٢س + ٣}{س - ٢} &، ٠ < س \leq ٣ \\ س^{٢} - ٢س + ٦ &، ٣ < س < ٦ \end{cases}$

---

١٩) أوجد $\lim_{س \to -١} \frac{٢\sqrt[٣]{س} + ٢}{(\sqrt[٣]{س} + ١)^{٥} - ٢\sqrt[٣]{س} - ٢}$

اختبار ١٤ - ١٥ تجريبي

١) الشكل أدناه يمثل منحنى الدالة هـ (س) المعرفة على ح . مجموعة كل قيم (ف) التي تكون عندها هـ(ف) ≠ $\underset{\text{س}\to\text{ف}^+}{\text{نهـا}}$ هـ (س) هي :



أ) {-٢ ، -١ ، ١}
ب) {-٣ ، -٢ ، -١ ، ١}
ج) {-٣ ، -٢ ، -١ ، ١ ، ٣}
د) {-٣}

٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ + \text{جـ}\left[\frac{\text{س}}{٢}\right] - \text{جـ}}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}$ موجودة ، فان قيمة جـ تساوي :

أ) −٣ ب) صفر ج) ٣ د) ٦

٣) إذا كانت الدالة ل(س) دالة ثابتة توازي محور السينات وتمر بالنقطة (-٤ ، ٢) ، فان $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}}$ (س × ل^٢(س) + ل(س^٢)) =

أ) ١٢ ب) ٢٢ ج) ٧٦ د) ٩٦

---

٤) إذا كانت الدالة ق (س) = $\left[\frac{١}{٢}\text{س} + \text{م}\right]$ متصلة عند س = ١ ، وغير متصلة عند س = ٢ ، فان قيمة م من الممكن أن تكون :

أ) ٢ ب) ١ ج) ٠.٦ د) ٠.٢

---

١٥) أوجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س} + ١ + \sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{س} - ١}\right)$

$$\text{هـ(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \sqrt{٨}}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} > ٢ \\ \text{ب} & ، \text{س} = ٢ \\ ٢\text{م}\text{س} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيم كل من م ، ب

---

١٩) أدرس اتصال الدالة التالية على الفترة] −∞ ، ٢ [

$$\text{ل (س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} & ، \text{س} < -١ \\ ٣ & ، \text{س} = -١ \\ \dfrac{\text{س}|\text{س}|}{|\text{س} - ٢|} & ، -١ < \text{س} \leqslant ١ \\ \left[\dfrac{٢\text{س}}{٣}\right] & ، ١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$

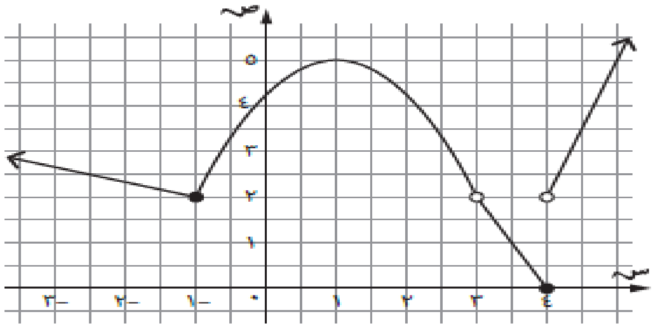
اختبار ١٤ - ١٥ دور أول

١) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ هـ(س) = ٢ ، فإن $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ (٤هـ(س) + ١) تساوي :

- ٥
- ٧
- ٩
- ١٣

٢) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان الدالة د(س)،

$\lim\limits_{س \leftarrow ب}$ د(س) = ٢ ، فإن قيم ب هي :



- {-١ ، ٣ ، ٤}
- {٣ ، ٤}
- {-١ ، ٤}
- {-١ ، ٣}

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{س^{-٤} - س^{-٣}}{٣س^{-٤} + ٢س^{-١}}$ تساوي :

- $\frac{١}{٣}$
- صفر
- $\frac{-١}{٢}$
- $-\infty$

٤) إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} ٢ - [س] & ، س \le ل \\ ٨ + ٢[س] & ، س > ل \end{cases}$ متصلة عند س = ل ،

فإن قيم ل تنتمي إلى الفترة :

-]-١ ، ٠[
-]-٢ ، -١[
-]-٣ ، -٢[
-]-٤ ، -٣[

١٥) أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow -١} \frac{١ - \sqrt{س + ٢}}{١ - س}$

١٦) إذا كانت ل(س) = |س| ، هـ (س) = $\begin{cases} س + ٤ & ، س \le ٠ \\ ٤ - س & ، س > ٠ \end{cases}$

ابحث إتصال الدالة د(س) = ل(س) × هـ (س) على ح .

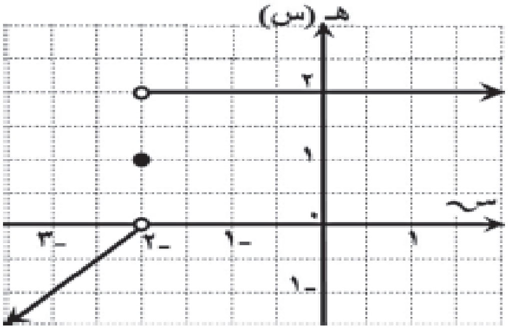
١٩) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{ب س^٢ - أ}{س - ٣} = ١٢$ ، حيث أ ، ب $\in$ ح ، فأوجد قيمة كلًا من أ ، ب.

متعة الرياضيات أ. باضنا

اختبار ١٤ - ١٥ دور ثاني

١) في الشكل المقابل الذي يمثل بيان الدالة هـ(س)،

$\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ هـ(س) تساوي:



- ▢ صفر
- ▢ ١
- ▢ ٢
- ▢ غير موجودة

٢) إذا كانت ق(س) دالة متصلة على مجالها، و كان $\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = – ٥ ،

فإن $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ (٣ × ق(س+٤)) تساوي:

- ▢ ٢١
- ▢ ١٢
- ▢ – ٥
- ▢ – ١٥

٣) إذا كانت $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{أ\,س^{٢}(س + ١)^{٤}}{(٣ - ٢س^{٣})^{٢}} = \dfrac{٣}{٢}$ ، فإن قيمة أ تساوي:

- ▢ ٦
- ▢ ٣
- ▢ – ٣
- ▢ – ٦

٤) مجموعة نقاط انفصال الدالة د(س) = $[٣ - \frac{٢}{٥}س]$ ، [ ] ترمز لدالة الصحيح ، هي :

- ▢ { $\frac{٢}{٥}$ م : م ∈ ص }
- ▢ { ٥ م : م ∈ ص }
- ▢ { $\frac{١}{٥}$ م : م ∈ ص }
- ▢ { $\frac{٥}{٢}$ م : م ∈ ص }

- -

١٥) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٦ ، فأوجد $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \dfrac{س \times ق(س)}{١ - ق(س)}$.

- -

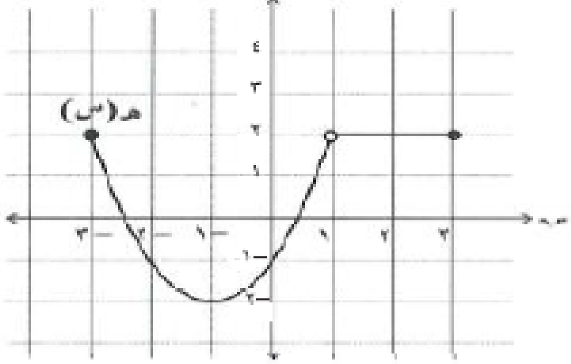
١٦) لتكن الدالة هـ (س) = $\begin{cases} ب - أ\,س^{٢} & ، س < ٣ \\ ٨ & ، س = ٣ \\ أ\,س^{٢} + ب + ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$ ،

أوجد قيم كلًا من أ ، ب التي تجعل هـ (س) متصلة عند س = ٣ .

- -

١٩) أوجد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \dfrac{(٢س - ١٦) + س\sqrt{س}}{س - ٤}$

اختبار ١٣ - ١٤ دور أول



١) من الشكل المجاور : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) =

○ −٢ ○ ١

○ ٢ ○ غير موجودة

٢) إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} س - ل & ، س > ٣ \\ ٢ل & ، س \le ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣ ، فإن قيمة ل تساوي:

○ صفر ○ ١ ○ ٢ ○ ٣

٣) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٤س^٢ - ٦}{٥ - ٢س^٢} \right)^٢ =$

○ −٤ ○ −٢ ○ ٢ ○ ٤

٤) إذا كانت $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـا}} \dfrac{هـ(س) - ٤}{س + ٤} = ٦$ ، فإن $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ + ٣س - ٤}{هـ(س) - ٤} =$

○ $-\dfrac{٥}{٦}$ ○ $-\dfrac{٦}{٥}$ ○ −١٨ ○ −٣٠

---

١٥) أوجد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{|س^٢ - ٣س - ٢٨|}{٢س - ٢}$

---

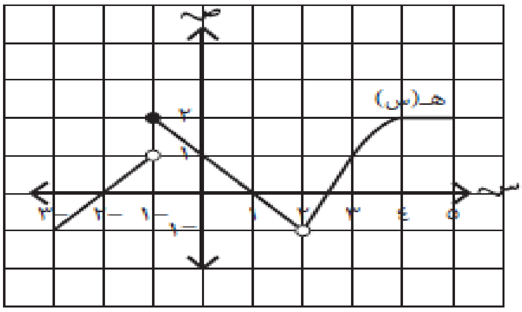
١٧) ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} ٧س - ١٣ & ، س \le ٢ \\ \left[\!\left[٢ - \dfrac{١}{٢}س \right]\!\right] & ، ٢ < س < ٦ \end{cases}$ على مجالها.

---

١٩) أوجد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ + \sqrt{س} - ٢}{س - ١}$

اختبار ١٣ - ١٤ دور ثاني

١) إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة هـ(س) المعرفة على الفترة [−٣، ٥]، فإن مجموعة قيم ل بحيث تكون $\lim_{س \to ل}$ هـ(س) = ١ تساوي :



- ⬭ {−١، ٠}
- ⬭ {−١، ٣}
- ⬭ {٠، ٣}
- ⬭ {−١، ٠، ٣}

٢) $\lim_{س \to ٤} \dfrac{-٤س\left(\sqrt{س}-٢\right)}{س-٤}$

- ⬭ ٤
- ⬭ ٢
- ⬭ −٢
- ⬭ −٤

٣) $\lim_{س \to \infty} (س+١)\left(\dfrac{٥}{س}+\dfrac{٧}{س^{٢}}+\dfrac{٤}{س^{٣}}\right) =$

- ⬭ ١
- ⬭ ٤
- ⬭ ٥
- ⬭ ٧

٤) إذا كان $\lim_{س \to أ} [١ - ٢س] = -١$ فإن أ تنتمي إلى الفترة:

- ⬭ $[\frac{١}{٢}، ١]$
- ⬭ $[\frac{١}{٢}، ١[$
- ⬭ $]\frac{١}{٢}، ١[$
- ⬭ $]\frac{١}{٢}، ١]$

---

١٥) إذا كانت د(س) = $\dfrac{س^{٢}-٢س-٨}{س+٢}$ ، فأوجد $\lim_{س \to ٥}$ د(س)

---

١٦) ابحث اتصال الدالة ق(س) = $\begin{cases} ١-س &، س \geq ٣ \\ \dfrac{|٢س-٦|}{س-٣} &، س < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

---

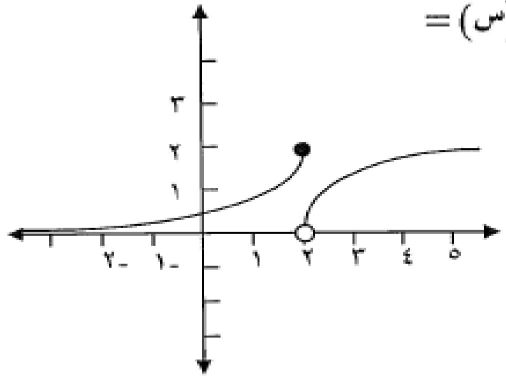
١٩) إذا كان $\lim_{س \to \infty} \dfrac{(٣+٤س^{٢})^{٥}}{أس(٧+س^{٢})^{ن}} = -٤$ ، حيث ن ∈ ص⁺، أ ∈ ح فأوجد قيمة كلاً من أ، ن

---

٢٠) إذا كانت $\lim_{س \to ١} \dfrac{م س - \sqrt{س+٣}}{س^{٢}-س} =$ ب ، م، ب ∈ ح، فأوجد قيمة كلاً من م، ب

اختبار ١٢ - ١٣ تجريبي

١) اذا كان الشكل المجاور يمثل الدالة هـ (س) ، فان $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهـــا}} ٣هـ(س) =$



☐ ٦ ☐ ٢

☐ صفر ☐ غير موجودة

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \sqrt[٣]{\frac{١٦س^٧ - ٢٧س^٥}{١ - ٢س^٧}} =$

☐ $-\infty$ ☐ -٢ ☐ ٢ ☐ ∞

٣) $\underset{س \to -٥}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٢٥}{س+٥} - \frac{س^٢}{س+٥}\right) =$

☐ صفر ☐ ٥ ☐ ١٠ ☐ ∞

٤) د(س) دالة متصلة يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) وكانت
$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} (٣د(٤س - ٧) - أ) =$ صفر ، فان قيمة أ تساوي :

☐ ٣ ☐ ٥ ☐ ٩ ☐ ١٥

- -

أ) إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} س + أ & س \le ٣ \\ ٣س + ب & س > ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣ ، وكانت د (٥) = ٨

فأوجد قيمة كل من أ ، ب .

- -

ب) اذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} -٥ & ، \quad س < ٢ \\ |٤ - ٢س| & ، \quad ٢ \le س \le ٣ \\ \left[\frac{س}{٦}\right] + ٢ & ، \quad ٣ < س \le ٦ \end{cases}$

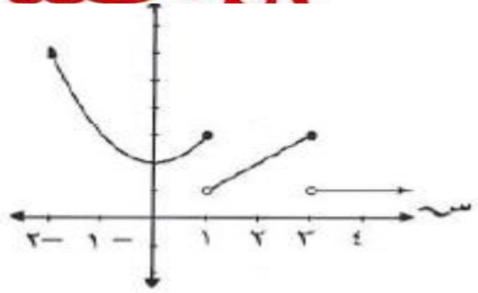
فابحث اتصال الدالة د(س) على مجالها

- -

أ) أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{س}{- س + \sqrt[٤]{س + ١} - ١}$

اختبار ١٢ - ١٣ دور أول

١) الشكل المجاور يمثل الدالة ص = د(س).
إذا كان أ ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ }، فإن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د(س)}$ موجودة عندما أ تساوي:



- ٢
- ٣
- ١، ٢
- ١، ٣

٢) قيمة ك التي تجعل الدالة $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٣س}^{٢} - ١٢}{\text{س} + ٢} & \text{، س} \neq -٢ \\ \text{ك} & \text{، س} = -٢ \end{cases}$ ، متصلة على ح تساوي:

- ٣
- صفر
- −٤
- −١٢

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -٤} \dfrac{|\text{٢س} + ٤| - ٤}{\text{س} + ٤} =$

- −٢
- −١
- صفر
- ∞

٤) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(\text{أ} + ٤)\text{س} - (\text{أ} + ٢)\text{س}^{٢}}{(\text{أ} - ٢)\text{س} + ٥} = \text{ب}$ ، حيث أ ، ب ∈ ح ، فإن قيمة ب تساوي:

- $\dfrac{٣}{٢}$
- $\dfrac{١}{٢}$
- $-\dfrac{١}{٢}$
- $-\dfrac{٣}{٢}$

- -

أ) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{\text{ق(س)}}{٣} + \text{٢س} \right) = ٥$ ، فأوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق(س)}$

- -

ب) ١) إذا كانت د(س) = هـ(س) × ق(س) ، حيث هـ(س) = [س − ٢] ، ق(س) = س ،
فابحث اتصال الدالة د(س) على الفترة [٠ ، ١] .

- -

أعد تعريف الدالّة $\text{د(س)} = \dfrac{٣ - \sqrt{\text{س} + ٦}}{\text{س} - ٣}$ ، بحيث تكون متصلة عند س = ٣

- -

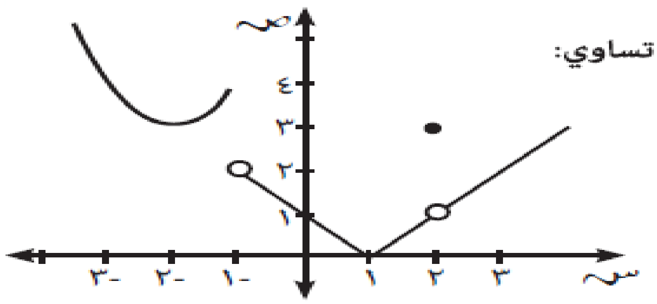
إذا كانت $\text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ١} + \text{س(س} - ١)}{\text{س}|\text{س}| - ١}$ ،

$\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \text{د(س)} = \text{٥ك} \times \lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{د(س)}$ ، فأوجد قيمة ك .

اختبار ١٢ - ١٣ دور ثاني

١) الشكل المجاور يمثل الدالة ص = د (س) ، إذا كان أ ∈ {−١، ١، ٢}

فإن $\lim_{س \to أ}$ د (س) غير موجودة عندما أ تساوي:



- ▭ −١
- ▭ ١ ، ٢
- ▭ −١ ، ٢
- ▭ ١

٢) قيمة أ التي تجعل الدالة د (س) = $\begin{cases} \frac{أس^2 - ٢س}{س - ٢} & ، س \ne ٢ \\ ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$ ، متصلة على ح تساوي :

- ▭ صفر
- ▭ ١
- ▭ ٢
- ▭ ٤

٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩س^٤ + س^٢}}{س^٢ - ٨} =$

- ▭ صفر
- ▭ ٣
- ▭ ٩
- ▭ ∞

---

٤) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٣أ - ٢}{س - ٢} = م$ ، حيث أ ، م ∈ ح فإن قيمة م تساوي :

- ▭ صفر
- ▭ ١
- ▭ ٢
- ▭ ٣

---

١٥) إذا كانت $\lim_{س \to ١} \left(٣س^٢ - \frac{٥}{ق(س)} + ٢\right) = ٠$ فأوجد $\lim_{س \to ١}$ ق (س).

---

١٦) أعد تعريف الدالة د(س) = $\frac{١ - س^٢}{\sqrt{س} - ١}$

بحيث تكون متصلة عند س = ١

---

١٧) ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} ١ & ، س = ١ \\ [س - ٢] & ، ١ < س \le ٢ \end{cases}$ على الفترة [١ ، ٢]

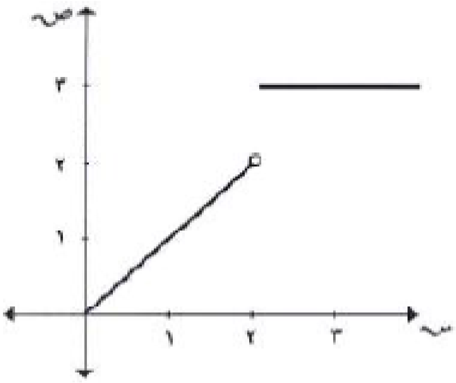
---

١٨) إذا كانت د (س) = $\frac{س^٢ + س(١ + |س + ٣|)}{\sqrt{س^٢ - ٩}}$ ، $\lim_{س \to -\infty}$ د (س) = $\frac{\lim_{س \to ١} د(س)}{٢ل}$

فأوجد قيمة ل.

اختبار ١١ - ١٢ دور أول

١) إذا كان الشكل المجاور يمثل الدالة د (س)، فإن $\lim\limits_{\text{س}\to ٢}$ د(س) تساوي:



- صفر
- ٢
- ٣
- غير موجودة

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \dfrac{٣٧ + \text{س}^٣ - ٢\text{س}^٤}{\text{س} + ٢ - ٤\text{س}^٢} =$

- $-\infty$
- صفر
- $\frac{١}{٢}$
- ∞

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{(-٢ + \text{س})^٢ - ٤}{\text{س}} =$

- -٤
- صفر
- ٤
- ∞

٤) إذا كان $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^٣\text{د(س)} - ٢٤}{\text{س} - ٢} = ٣٦$ ، حيث د(س) دالة حدودية، فإن د (٢) تساوي:

- ٣٦
- ٢٤
- ٤
- ٣

ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢ & ، \text{س} = ٣ \\ \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{٣\text{س} - ٩} & ، \text{س} \neq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - \text{أ}\text{س} + ٥ & ، \text{س} \leq ٤ \\ |\text{س} - ٣| & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$

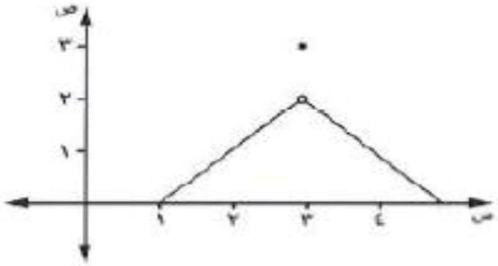
متصلة على ح ، فأوجد قيمة أ .

أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}} - ١}$

متعة الرياضيات

اختبار ١١ - ١٢ دور ثاني

١) من الشكل المجاور $\lim\limits_{س \to ٢} د(س) =$



- ☐ ١
- ☐ ٢
- ☐ ٣
- ☐ غير موجودة

٢) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{\frac{١}{س} + ١}{س + ١}$

- ☐ ∞
- ☐ ١
- ☐ صفر
- ☐ -١

٣) إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{١ - س^{٣}}{س^{٢م}(٢س^{(ن+١)} + ٣)^{٢}} = \dfrac{-١}{٤}$ فإن م + ن =

- ☐ $\dfrac{١}{٢}$
- ☐ ١
- ☐ $\dfrac{٥}{٢}$
- ☐ ٣

---

٤) إحدى الدوال التالية متصلة على ح − { ١ ، ٣ } :

- ☐ $د(س) = \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ٢}}{س^{٢} - ٢س - ٣}$
- ☐ $د(س) = \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ٣س + ٢}}{س^{٢} - ٢س - ٣}$
- ☐ $د(س) = \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ٢}}{س^{٢} - ٤س + ٣}$
- ☐ $د(س) = \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ٣س + ٢}}{س^{٢} - ٤س + ٣}$

إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} \quad س \quad ٢ & ، س > ١ \\ س + ٢ل & ، س \le ١ \end{cases}$

فأوجد قيمة ل التي تجعل الدالة ق (س) متصلة عند س = ١

ابحث اتصال الدالة $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، ١ \le س < ٣ \\ ٧ + س & ، ٣ \le س < ٥ \end{cases}$ على مجالها.

إذا كان $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} + (م - ٢)س - ٢م}{س - ٢} = ٥$ فأوجد قيمة م

اختبار ٨ - ٩ دور ثاني

١) إذا كانت د (س) دالة حدودية ، $\lim\limits_{س \to ٩} \left(\frac{٣د(س)}{\sqrt{س}} + ٢ \right) = ٥$ ، فإن قيمة $\lim\limits_{س \to ٩} (د(س))^{٣} =$

أ) -٨ ب) -٢ ج) ٢ د) ٨

٢) إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{[م - ١]\, س}{٣\, س - ١} = \frac{-١}{٣}$ ، فإن قيمة م من الممكن أن تساوي:

أ) ٠,٥ ب) ١,٥ ج) ٢,٥ د) ٣,٥

٣) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} د(س) = ٥$ وكانت د(س) **معرفة وغير متصلة** عند س = ٢ ، فإن قيمة د(٢) تنتمي إلى :

أ) ح - [-٥ ، ٥] ب) ح -]-٥ ، ٥] ج) ح - {٥} د) {٥}

٤) إحدى الفترات التالية تكون عندها الدالة $د(س) = \frac{س}{\sqrt{|س| - ١}}$ متصلة :

أ)]-١ ، ١[ب) ح - [-١ ، ١] ج) ح -]-١ ، ١[د) [-١ ، ١]

أوجد $\lim\limits_{س \to \sqrt{٣}} \frac{س^{٦} - ٢٧}{س^{٣} - ٣\sqrt{٣}}$

السؤال الثالث :

١) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٨س + ١٥}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢ك & ، س = ٣ \end{cases}$

أوجد قيمة ك التي تجعل د(س) متصلة على مجالها

لتكن $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س + ٣ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [\frac{١}{٢}س + ٢] & ، ٢ < س < ٤ \\ |٢س - ٨| & ، س \geq ٤ \end{cases}$

ابحث اتصال د(س) على مجالها.